Ćwiczenie Nr 222

CZAS ZDERZENIA KUL – SPRAWDZENIE WZORU HERTZA

Literatura:

1. Opracowanie do ćwiczenia Nr 222, czytelnia FiM.
2. L.D.Landau, E.M.Lifszic „*Kurs fizyki teoretycznej*", tom 7, „*Teoria sprężystości*", § 9. (dostępna w bibliotece FiM , sygn. FII-845).
3. Instrukcja do ćwiczenia: http://labor.zut.edu.pl/fileadmin/INSTRUKCJE/222.pdf

W poniższym opracowaniu przedstawiono wyprowadzenie wzoru na czas zderzenia dwóch metalowych kul. Wzór ten – noszący nazwę wzoru Hertza – otrzymano dwoma sposobami. Sposób pierwszy polega na analitycznym rozpatrzeniu procesów fizycznych zachodzących podczas zderzenia. Nie jest to metoda prosta, dlatego podano jedynie schemat wyprowadzenia, bez szczegółowych rachunków. W metodzie drugiej, opartej na analizie wymiarowej, nie otrzymuje się kompletnego wzoru Hertza, ale sama metoda jest bardzo prosta i otrzymany rezultat jest wystarczający do potrzeb ćwiczenia laboratoryjnego. W końcowej części opracowania podano prowadzenie wzoru pozwalającego obliczyć prędkość kuli przed zderzeniem.

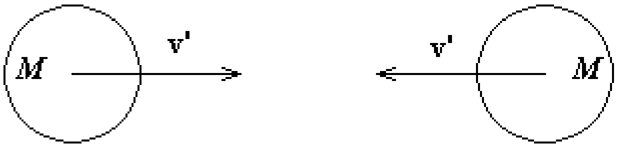
I. Wzór Hertza – zarys metody wyprowadzenia wzoru

Rozpatrzmy zderzenie dwóch jednakowych, metalowych kul. Wypiszmy najpierw wielkości charakteryzujące każdą z kul, które będą istotne w procesie zderzenia. Rozmiary geometryczne kuli opisuje jej promień R, zaś jej bezwładność – masa M. Własności sprężyste materiału, z którego kule są zrobione określają dwa parametry: moduł Younga E i współczynnik Poissona σ. Przypomnijmy, że moduł Younga zdefiniowany jest poprzez prawo Hooka, które stwierdza proporcjonalność względnego wydłużenia (skrócenia) ($\Delta l/l$) do przyłożonego ciśnienia p, wywołującego to wydłużenie (skrócenie):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}.$$

Współczynnik Poissona σ, jest zdefiniowany jako stosunek względnego poprzecznego skrócenia do względnego podłużnego wydłużenia. Jest to zatem wielkość bezwymiarowa.

Załóżmy, że jedna z dwóch takich samych kul – każda o masie M – spoczywa, a druga zbliża się do niej z pewną stałą prędkością. Najwygodniejszym do opisu układem odniesienia będzie układ środka masy tych kul. W tym układzie obie kule zbliżają się do siebie z taka samą prędkością v'.



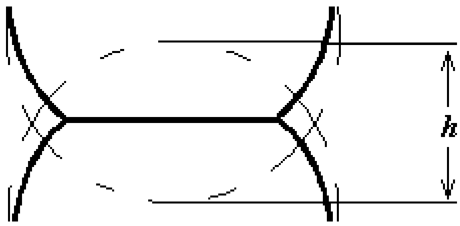
Rys. 1. Dwie kule przed zderzeniem w układzie środka masy

Energia kinetyczna tych kul w układzie środka masy wynosi:

$$E_k = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot M \cdot (v')^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v^2,$$

gdzie $\mu = (m_1 \cdot m_2)/(m_1 + m_2)$ jest masą zredukowaną równą w naszym przypadku (M/2), zaś jest $v = 2 \cdot v'$ prędkością względną kul.

W czasie zderzenia obie kule deformują się (Rys. 2).



Rys. 2. Dwie kule w trakcie zderzenia deformują się sprężyście

Niech parametr h określa względne zbliżenie środków kul w czasie zderzenia (patrz Rys. 2). Zmienia się on od wartości zero (początek zderzenia) do pewnej wartości maksymalnej h_o i z powrotem do zera (koniec zderzenia). Energia całkowita układu kul składa się teraz z dwóch części: energii kinetycznej i energii potencjalnej. Można pokazać (patrz pozycja literaturowa [1]), że energia kinetyczna jest proporcjonalna do kwadratu szybkości zmian parametru h:

$$E_k \approx -\frac{\mu}{2} \cdot (dh/dt)^2, \tag{1}$$

zaś energia potencjalna jest proporcjonalna do parametru h w potędze 5/2:

$$E_p = k \cdot h^{\frac{5}{2}}, \tag{2}$$

gdzie k jest pewną stałą, zależną od R, E i σ.

Stosując zasadę zachowania energii, otrzymujemy równanie:

$$\mu \cdot (dh/dt)^2 + 2 \cdot k \cdot h^{5/2} = \mu \cdot v^2. \tag{3}$$

Maksymalne zbliżenie środków kul jest wtedy, gdy (dt/dt) = 0.

Podstawiając ten warunek do (3), otrzymujemy następujące wyrażenie dla h_o:

$$h_o = \left(\frac{\mu \cdot v^2}{2 \cdot k}\right)^{2/5}. \tag{4}$$

Równanie (3) można łatwo przekształcić do następującej postaci:

$$dt = \frac{dh}{\sqrt{v^2 - \frac{2 \cdot k}{\mu} \cdot h^{5/2}}} \quad . \tag{5}$$

Dysponując tym równanie nietrudno napisać równanie na czas zderzenia kul r:

$$\tau = 2 \cdot \int_0^{h_o} \frac{dh}{\sqrt{v^2 - \frac{2 \cdot k}{\mu} \cdot h^{5/2}}} \; .$$

(6)

Obliczenie tej całki nie jest proste. Napiszmy zatem jedynie końcowy rezultat:

$$\boxed{\tau = 3{,}291 \cdot \left(\frac{M^2 \cdot (1-\sigma^2)^2}{E^2 \cdot R \cdot v} \right)^{1/5}} \tag{7}$$

Powyższe równanie nosi nazwę wzoru Hertza.

II. Znajdowanie zależności na czas zderzenia kul za pomocą analizy wymiarowej

Spróbujmy znaleźć funkcyjną zależność czasu zderzenia kul od istotnych parametrów fizycznych determinujących ten proces, posługując się metodą analizy wymiarowej.

Jak zwykle w tej metodzie, na początku powinniśmy określić i wypisać wszystkie parametry, od których – jak sądzimy – będzie zależał czas zderzenia kul. Proponujemy następujące wielkości (i w nawiasie ich jednostki miar):

masa kuli	M	[kg],
promień kuli	R	[m] ,
prędkość kuli przed zderzeniem	v	$[m \cdot s^{-1}]$,
moduł Younga	E	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}]$.

Zgodnie z podstawową ideą analizy wymiarowej, przedstawiamy zależność czasu zderzenia τ w postaci iloczynu wypisanych powyżej czterech parametrów, każdy w nieznanej na razie potędze:

$$\tau = const \cdot E^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot R^{\gamma} \cdot v^{\delta} \, ,$$

(8)

gdzie const jest liczbą rzędu jedności.

Powyższe równanie zapisane dla jednostek miar tych wielkości ma postać:

$$[s] = [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}]^{\alpha} \cdot [kg]^{\beta} \cdot [m]^{\gamma} \cdot [m \cdot s^{-1}]^{\delta} \tag{9}$$

Można je rozpisać na trzy następujące równania:

dla [m] $\quad 0 = -\alpha + \gamma + \delta$,

$$\text{dla} \quad [s] \qquad 1 = -2\alpha - \delta, \tag{10}$$
$$\text{dla} \quad [kg] \qquad 0 = \alpha + \beta.$$

Jak łatwo zauważyć, mamy cztery niewiadome ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$) i tylko trzy równania. Jedyne co możemy zrobić, to zmniejszyć do jednej ilość niewidomych. Niech tą jedną niewiadomą pozostanie δ . Z układu równań (10) otrzymujemy:

$$\alpha = -\frac{1+\delta}{2},$$
$$\beta = \frac{1+\delta}{2}, \tag{11}$$
$$\gamma = -\frac{3\cdot\delta+1}{2}.$$

Nieznany parametr δ wyznaczymy stosując następujący sposób: rozważymy z punktu widzenia fizyki jakiś aspekt procesu zderzenia, napiszemy stosowne równanie zawierające niektóre z interesujących nas parametrów i porównamy potęgi, w jakich te parametry występują. Najprościej rozpatrzyć aspekt energetyczny zderzenia kul. W tym momencie zderzenia, gdy środki kul znajdują się najbliżej, energia kinetyczna kul jest zamieniona na energię sprężystego ich odkształcenia. Możemy zatem napisać, że

$$E_{kin} = \frac{m\cdot v^2}{2} = \frac{E\cdot\varepsilon^2\cdot\Delta V}{2} = E_{pot}, \tag{12}$$

gdzie $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R}$ jest względną zmianą wymiaru deformowanej kuli, a ΔV jest objętością obszaru zdeformowanego. W powyższym równaniu prędkość występuje w potędze drugiej, zaś moduł Younga w potędze pierwszej. Ponieważ w równaniu (8) prędkość występuje w potędze δ, a moduł Younga w potędze α, mamy prawo napisać następujące równanie:

$$\alpha = 2\cdot\delta, \tag{13}$$

ponieważ potęga przy prędkości jest dwa razy większa niż potęga przy module Younga. Z układu równań (11) i (13) otrzymujemy ostatecznie następujące wartości wykładników potęgowych:

$$\alpha = -\frac{2}{5}, \qquad \beta = \frac{2}{5}, \qquad \gamma = -\frac{1}{5}, \qquad \delta = -\frac{1}{5}. \tag{14}$$

Czas zderzenia kul będzie zatem wyrażony następującym równaniem:

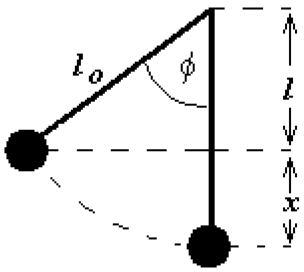
$$\boxed{\tau = const\cdot\sqrt[5]{\frac{M^2}{E^2\cdot R\cdot v}}.} \tag{15}$$

Równanie (15) jest zgodne z równaniem (7), gdyż istotne parametry występują w nim w prawidłowych potęgach. Należy zwrócić szczególną uwagę na wykładnik potęgowy przy prędkości (równy –1/5), ponieważ właśnie on będzie wyznaczany w ćwiczeniu laboratoryjnym.

Oznaczając: $const \cdot \sqrt[5]{\frac{M^2}{E^2 \cdot R}} = C$ otrzymamy ten wzór w postaci;

$$\boxed{\tau = C \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{v}} = C \cdot v^{-\frac{1}{5}}}$$

Jak obliczyć prędkość kuli przed zderzeniem, wiedząc jaki był początkowy kąt wychylenia tej kuli? Niech kula zawieszona na nici o długości l wychylona będzie o kąt ϕ (patrz Rys. 3)



Rys. 3. Kula zawieszona na nici l wychylona o kąt ϕ

Jej środek znajduje się więc o x wyżej, niż w chwili zderzenia. Stosując zasadę zachowania energii do tej sytuacji dostajemy:

$$m \cdot g \cdot x = \frac{m \cdot v^2}{2}. \tag{16}$$

Jak łatwo zauważyć na Rys. 3,

$$\mathrm{x} = \mathrm{l_o} - \mathrm{l} = \mathrm{l_o} \cdot (1 - \cos \phi). \tag{17}$$

Podstawiając równanie (17) do równania (16) otrzymujemy ostateczny rezultat:

$$\mathrm{v} = \sqrt{2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{l_o} \cdot (1 - \cos \phi)}. \tag{18}$$