Ćwiczenie Nr 209

Temat: **Wyznaczanie częstotliwości drgań widełek stroikowych (kamertonu) za pomocą rury Quinckego.**

I. Literatura:

[1] Sz. Szczeniowski, „ Fizyka doświadczalna” cz. I, rozdz. XV i XVI , PWN, Warszawa 1980
[2] T. Rewaj (red.), „Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki w politechnice”, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1998 (lub inne wydanie).
[3] D. Hallyday, R. Resnick, „Fizyka”, t. 1, rozdz. 19 i 20, PWN, Warszawa 2002.
[4] S.J. Ling, J. Sanny, W. Moebs: Fizyka dla szkół wyższych, T.1-3, Katalyst Education 2018; OpenStax, link: https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1

II. Tematy teoretyczne

1. Ruch falowy: rodzaje fal, równanie fali płaskiej, superpozycja fal, wielkości charakteryzujące ruch falowy.
2. Fala dźwiękowa, prędkość fali dźwiękowej w powietrzu, zależność prędkości od temperatury.
3. Zjawisko interferencji fal, fala stojąca, warunki powstawania fali stojącej, zjawisko rezonansu akustycznego, metody wyznaczania parametrów opisujących rozchodzenie się fal dźwiękowych w ośrodku.

III. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne zapoznanie się z drganiami rezonansowymi słupów powietrza oraz wyznaczenie częstotliwości drgań wybranych kamertonów w oparciu o pomiar długości fali stojącej wytworzonej w rurze Quinckego.

IV. Zestaw pomiarowy

Rura Quinckego połączona za pomocą węża gumowego z naczyniem napełnionym wodą, miarka metrowa z podziałką milimetrową, kamertony, młoteczek do wzbudzania kamertonów.

V. Wiadomości ogólne i metoda pomiaru

W fizyce *falami* nazywają się różnego rodzaju rozchodzące się w przestrzeni zaburzenia stanu materii lub pola. Jeżeli mechaniczne zaburzenia rozchodzą się w ośrodku sprężystym, a amplitudy drgań odpowiednich cząsteczek ośrodka są małe, to fale takie nazywają się *dźwiękowymi* lub *akustycznymi*. Przy częstotliwości z zakresu 16 – 20000 Hz fale te oddziałują na organy słuchu człowieka, wywołują wrażenia dźwiękowe (dźwięki słyszalne). Fale dźwiękowe mogą być okresowe i mogą być modelowane jako zmiany ciśnienia powietrza lub drgania cząsteczek. Fale dźwiękowe w powietrzu oraz większości płynów są falami podłużnymi. W ciałach stałych fale dźwiękowe mogą być poprzeczne i podłużne.

Fale dźwiękowe charakteryzuje: **częstotliwość $\boldsymbol{f}$** dźwięku , **długość $\boldsymbol{\lambda}$** fali **i prędkość $\boldsymbol{v}$** rozchodzenia się dźwięku. Częstotliwość f dźwięku otrzymamy z równania:

$$\boldsymbol{v} = f \cdot \lambda \rightarrow f = \frac{\boldsymbol{v}}{\lambda} \qquad (1)$$

Prędkość ($\boldsymbol{v}$) rozchodzenia się fal mechanicznych zależy od własności fizycznych ośrodka, a mianowicie od jego sprężystości i gęstości, w ośrodkach jednorodnych przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\,, \tag{2}$$

gdzie: ρ- gęstość ośrodka (zał. $\rho = const$), K – odpowiedni moduł ściśliwości; w przypadku fal podłużnych będzie to moduł Younga *E*, a w przypadku fal poprzecznych moduł sztywności *G*.

W przypadku podłużnej fali nie zachodzi zmiana wymiarów poprzecznych i możemy stosować prawo Hooke'a. Jeżeli wyobrazimy sobie długie, cylindryczne naczynie , wewnątrz którego znajduje się gaz lub ciecz pod ruchomym nieważkim tłokiem, to według prawa Hooke'a bezwzględna wartość ciśnienia Δp jest wprost proporcjonalna do względnej zmiany objętości ośrodka:

$$\Delta p = E\frac{\Delta V}{V},$$

gdzie: *E*- moduł Younga (moduł ściśliwości objętościowej ośrodka); ΔV – bezwzględna wartość zmiany objętości początkowej V.

Przy ściskaniu ośrodka sprężystego ($\Delta V < 0$), ciśnienie jego wzrasta ($\Delta p > 0$), przy rozciąganiu-maleje. Zatem, związek między rzeczywistymi wartościami przyrostu ciśnienia i objętości ma postać:

$$\Delta p = -E\frac{\Delta V}{V} \tag{3}$$

Aby wyznaczyć moduł Younga E gazu zakładamy, że objętość jego ulega nieskończenie małemu odkształceniu, wówczas wzór (3) przyjmuje postać:

$$dp = -E\frac{dV}{V}, \tag{3a}$$

stąd wyznaczamy *E*:

$$E = -V\frac{dp}{dV} \tag{4}$$

We wzorze (4) wartość pochodnej dp/dV zależy od rodzaju procesu objętościowego odkształcenia gazu. Ze względu na dużą prędkość rozchodzenia się fal możemy założyć, że odbywa się proces adiabatyczny. W procesie adiabatycznym, przy szybkim odkształceniu , następuje dostatecznie duża częstość drgań cząsteczek ośrodka. Ponieważ częstość drgań wymuszonych ośrodka, sprężystego równa jest częstości siły wymuszającej, więc przy rozchodzeniu się w ośrodku fal akustycznych, drgania jego cząsteczek odbywają się z tą samą częstością (częstością fali) co i drgania źródła fal.

Przy założeniu, że powietrze jest gazem doskonałym, a odkształcenia, z jakimi mamy do czynienia zachodzą bardzo szybko, czyli adiabatycznie, wówczas spełnione jest równanie:

$$pV^{\boldsymbol{\kappa}} = \text{const},$$

gdzie: $\boldsymbol{\kappa} = \frac{C_p}{C_v}$ -wykładnik adiabaty, równy stosunkowi ciepeł właściwych (lub molowych) gazu przy stałym ciśnieniu i przy stałej objętości.

Różniczkując powyższe równanie Poissona, otrzymamy:

$$Vdp + \ p \cdot \kappa \cdot V^{\boldsymbol{\kappa-1}} dV = 0,$$

skąd

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{\kappa \cdot p}{V}.$$

Uwzględniając powyższą zależność w równaniu (4) otrzymamy:

$$E = \kappa \cdot p \tag{5}$$

Ze wzorów (5) i (2) otrzymamy prędkość fali podłużnej w gazie doskonałym przy przemianie adiabatycznej:

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot p}{\rho}}\,, \tag{6}$$

Ponieważ prędkość dźwięku zależy od gęstości materiału, a gęstość od temperatury, to w celu wyznaczenia zależności między temperaturą ośrodka i prędkością rozchodzenia się w nim dźwięku skorzystamy ze wzoru na gęstość: $\rho = \frac{m}{V}$.

Gdy uwzględnimy wcześniejsze założenia i zastosujemy równanie Clapeyrona $pV = nRT$, wówczas gęstość gazu doskonałego wynosi:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m \cdot p}{V \cdot p} = \frac{m \cdot p}{nRT}$$

gdzie: R- uniwersalna stała gazowa $R = 8{,}31446 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}$; m, p, V i T- odpowiednio: masa, ciśnienie, objętość i temperatura bezwzględna gazu, n-liczba moli danego gazu.

Z teoretycznych rozważań wynika, że masa powietrza:

$$m = nM,$$

gdzie M– jest masą cząsteczkową gazu; sumą mas wszystkich składników pomnożonych przez odpowiednie współczynniki wagowe; *suche powietrze zawiera (molowo) w przybliżeniu 78%*N_2*, 21%*O_2 *i 1%Ar* .

Stąd, gęstość suchego powietrza w warunkach normalnych:

$$\rho = \frac{M \cdot p}{RT} \tag{7}$$

Podstawiając powyższy związek (7) do wzoru (6) otrzymamy wzór na prędkość dźwięku w gazie doskonałym przy przemianie adiabatycznej :

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \tag{8}$$

gdzie: $\boldsymbol{\kappa}$ - jest wykładnikiem adiabaty $\left(\boldsymbol{\kappa} = \frac{C_p}{C_v}\right)$, *M*- masa cząsteczkowa gazu, R- uniwersalna stała gazowa, *T*- temperatura bezwzględna gazu (w K).

Ze wzoru (8) wynika, że prędkość fal dźwiękowych w gazie doskonałym jest większa dla większych temperatur i mniejsza w przypadku cięższych gazów.

Dla suchego powietrza w temperaturze $T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K}$, pod ciśnieniem atmosferycznym $p_0 = 101\,325$ Pa; przy założeniu, że $\boldsymbol{\kappa} = 1{,}40$, $M = 0{,}02897\,\frac{kg}{mol}$, otrzymujemy prędkość dźwięku $\boldsymbol{v_0}$:

$$\boldsymbol{v_0} = 331{,}3\ \frac{m}{s}$$

Traktując zmiany temperatury gazu jako adiabatyczne, wzór na prędkość dźwięku w powietrzu (8) można uprościć do prędkości rozchodzenia się dźwięku w dowolnej temperaturze:

$$\boldsymbol{v_T} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}\cdot\frac{T_0}{T_0}} = \boldsymbol{v_0}\cdot\sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_0}}} \tag{9}$$

gdzie: v_T- prędkość fali dźwiękowej (m/s) w gazie o temperaturze *T (w K)*, v_0- prędkość dźwięku w temperaturze T_0 (w K) .

Stosując skalę Celsjusza $\mathrm{T} = 273{,}15 + \mathrm{t_c}$, ostatni wzór można zapisać :

$$v_{t_c} = v_0\sqrt{1+\frac{t_c}{273{,}15°C}} \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{v_{t_c}} = 331{,}3\sqrt{1+0{,}004\cdot t_c} \tag{9a}$$

gdzie: t_c – temperatura pokojowa zmierzona w °C.

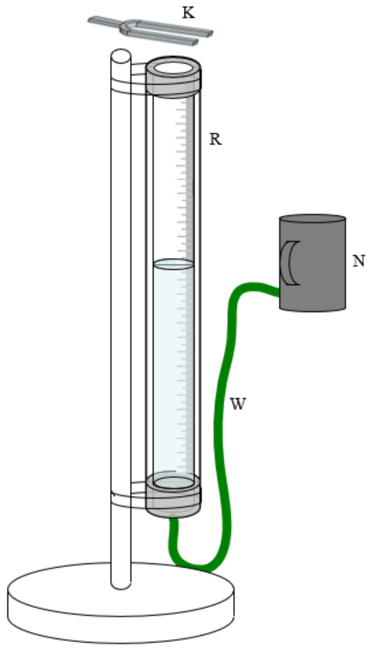
Jeżeli zależność (9) uwzględnimy we wzorze (1), to otrzymamy wyrażenie na częstotliwość f fali dźwiękowej w powietrzu:

$$f = \frac{\boldsymbol{v_0}}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_0}}} \tag{10}$$

gdzie: λ - długość fali, v_0- prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu w temperaturze $T_0 = 273{,}15$ K (0°C) oraz temperaturę powietrza T (w K).

Metoda pomiaru

W celu wyznaczenia częstotliwości fali dźwiękowej w powietrzu, w większości przypadków mierzy się odpowiadającą jej długość fali (λ). Dla zmierzenia długości fali w powietrzu wykorzystamy zjawisko rezonansu akustycznego oraz układ doświadczalny z rurą szklaną, tzw. rurą Quinckego (rys.1). Nieruchoma wąska szklana rura połączona jest za pomocą węża gumowego z ruchomym naczyniem wypełnionym wodą (rys.1). Przesuwając w pionie naczynie z wodą możemy regulować poziomy cieczy i powietrza w rurze Quinckego.



Rys. 1. Układ do wyznaczania częstotliwości dźwięku w powietrzu: K- kamerton, R- rura Quinckego, N- naczynie z wodą, W-wąż gumowy.

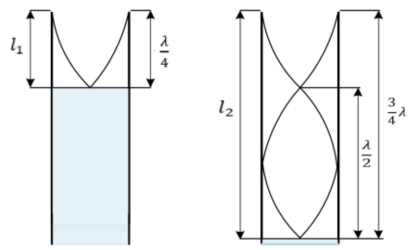
W naszym przypadku rura Quinckego jest z jednej strony wypełniona cieczą (rys.1). Jeżeli nad otwartym końcem szklanej rury umieścimy drgający kamerton, to w słupie powietrza, znajdującego się w rurze, powstaną drgania wymuszone o częstotliwości zależnej od częstotliwości źródła dźwięku. Fala dźwiękowa biegnąca od kamertonu i fala odbita od powierzchni wody, interferują w słupie powietrza nad wodą. Przy odpowiedniej wysokości słupa powietrza w rurze następuje wyraźny wzrost głośności dźwięku, stanowiący rezonans drgań słupa powietrza nad wodą z drganiami kamertonu i tworzy się fala stojąca.

Zjawisko rezonansu zaobserwujemy wtedy, gdy częstotliwość drgań wymuszonych będzie praktycznie równa częstotliwości drgań własnych słupa powietrza. Z teoretycznych rozważań wynika, że częstotliwości drgań własnych słupa powietrza można obliczyć korzystając ze wzoru (10):

$$f = \frac{\boldsymbol{v_0}}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_0}}} \tag{10}$$

gdzie: λ - długość fali, v_0- prędkość rozchodzenia się dźwięku w powietrzu w temperaturze $T_0 = 273{,}15$ K (0°C) oraz temperaturę powietrza T (w K).

W przypadku, gdy mamy rurę zamkniętą z jednej strony (ciecz), to rezonans występuje zawsze wtedy, gdy długość słupa powietrza (l) jest równa nieparzystej wielokrotności ćwiartek długości fali akustycznej (λ) (rys.2).



Rys.2. Schemat fali stojącej w rurze Quinckego

Ogólnie więc:

$$l = \mathrm{n} \cdot \frac{\lambda}{4} \tag{11}$$

gdzie :$n = 1, 3, 5, \ldots$.

Powstające fale stojące mają strzałkę przy wylocie rury , a węzeł na powierzchni wody. Przy zmianie poziomu wody w rurze dźwięk słabnie. Ponowne wzmocnienie dźwięku może nastąpić wtedy, gdy w słupie powietrza znowu powstanie nieparzysta liczba ćwiartek długości fali. Zmierzona najmniejsza różnica długości słupa powietrza, przy której wystąpił rezonans; czyli odległość miedzy kolejnymi wzmocnieniami dźwięku, równa jest połowie długości fali akustycznej (rys.2):

$$l_2 - l_1 = \frac{\lambda}{2}$$

Zatem długość (λ) fali dźwiękowej wynosi:

$$\lambda = 2 \cdot (l_2 - l_1) \tag{12}$$

gdzie :$(l_2 - l_1)$. - najmniejsza różnica długości słupa powietrza, przy której wystąpił rezonans.

Jeżeli częstotliwość drgań kamertonu i częstotliwość drgań słupa powietrza są w rezonansie, czyli w przybliżeniu drgają z jednakową częstotliwością, to wykorzystując wzory (10) i (12) wyznaczymy częstotliwość drgań badanego kamertonu f:

$$f = \frac{\boldsymbol{v_0}}{2 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_0}}} \tag{13}$$

gdzie: $\boldsymbol{v_0} = (331{,}3 \pm 0{,}3)\ \frac{m}{s}$ -prędkość dźwięku w powietrzu w temperaturze $T_0 = 273{,}15$ K (0°C) przy $p_0 = 1013{,}25\ hPa$; T- temperatura otoczenia (w K), $(l_2 - l_1)$- najmniejsza różnica długości słupa powietrza, przy której wystąpił rezonans.

W naszych rozważaniach przyjęliśmy, że promień słupa powietrza, tj. promień rury R, w której znajduje się powietrze, jest w porównaniu mały z jego długością l, tj. $R \ll l$.

VI. Wykonanie ćwiczenia

1. Wprawić większy kamerton w drgania (uderzyć kamerton młoteczkiem) i umieścić go w pobliżu otwartego końca rury.
2. Obniżając powoli poziom wody w rurze od najwyższego położenia (obniżając naczynie z wodą i wykorzystując zasadę naczyń połączonych), dobrać tak wysokość słupa powietrza, aby usłyszeć najsilniejsze wzmocnienie dźwięku i zmierzyć ***l*₁.**
3. Znaleźć **kolejne** (najbliższe) miejsce rezonansu ***l*₂**, tak jak w punkcie 2. Obniżając poziom wody , a tym samym zwiększając długość słupa powietrza w rurze.
4. Pomiary l_1 i l_2 powtórzyć pięć razy, na zmianę, przy obniżaniu i podwyższaniu poziomu cieczy. Za każdym razem odczytane z przymiaru wysokości l_1 i l_2 zapisać w tabeli 1. Zwrócić uwagę, aby zanotować dwa ***sąsiednie*** wzmocnienia.
5. Pomiary powtórzyć przynajmniej dla trzech różnych kamertonów.
6. Zmierzyć temperaturę otoczenia.
7. Wyniki pomiarów zapisać w tabeli 1.

Tabela 1.

Nr kamertonu	l_1 [m]	$\bar{l}_1$ [m]	l_2 [m]	$\bar{l}_2$ [m]	$\bar{f}$ [s^{-1}]	$u(f)$ [s^{-1}]	
I							t[^{0}C]=….
							T[K]=...........
							Δ(T)[K]=…..
II							T_0 = 273,15K
							v_0 = 331,3 m/s
							Δ(v_0)=0,3 m/s
III							$\Delta l_{1,2}$ [m]=….

VII. Opracowanie wyników pomiarów

1. Obliczyć średnie wysokości słupów powietrza $\bar{l}_1$ i $\bar{l}_2$, przy których wystąpił rezonans akustyczny dla trzech kamertonów.
2. Obliczyć częstotliwość drgań dla każdego z kamertonów z równania (13):

$$f = \frac{\boldsymbol{v_0}}{2 \cdot (\bar{l}_2 - \bar{l}_1)} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T_0}}}$$

3. Znaleźć niepewność całkowitą pomiaru częstotliwości dźwięku $u(f)$ kamertonów za pomocą wzoru:

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v_0}\right)^2 \cdot u^2(v_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 \cdot u^2(l_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 \cdot u^2(l_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 \cdot u^2(T)} =$$

$$= f \cdot \sqrt{\frac{u^2(v_0)}{v_0^2} + \frac{u^2(l_2)+u^2(l_1)}{(\bar{l}_2-\bar{l}_1)^2} + \frac{u_B^2(T)}{4 \cdot T^2}}.$$

- W powyższym, niepewność standardową całkowitą $u(l_i)$ obliczamy stosując wzór:

$$u(l_i) = \sqrt{u_A^2(\bar{l}_i) + u_B^2(l_i)}$$

gdzie: $u_A(\bar{x})$ - niepewność typu A obliczamy stosując wzór:

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}},$$ gdzie n-liczba pomiarów;

$u_B(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$- niepewność typu B, przy czym Δx- oznacza niepewność maksymalną wielkości x.

Na przykład dla odległości l_2:
Niepewność typu A obliczamy jako

$$u_A(\bar{l}_2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(l_i - \bar{l}_2)^2}{5\cdot(5-1)}}$$ (n=5,czyli dla pięciu pomiarów l_2),

a niepewność typu B jako

$$u_B(l_2) = \frac{\Delta l_2}{\sqrt{3}}$$

gdzie: Δl_2 - dokładność odczytu położenia poziomu wody na tle skali w momencie, gdy słyszymy wzmocnienie. Należy je oszacować samodzielnie, ale zazwyczaj przyjmowane jest w zakresie 0,5-1cm).

4. Dla prędkości v_0 oraz temperatury T możemy podać tylko niepewności typu B.
5. Wyniki obliczeń zapisać w tabeli.
6. Wyniki końcowe dla każdego kamertonu zapisać w postaci
$$f = \bar{f}\big(u(f)\big)\ Hz$$
[Np. $f = 329{,}6(4{,}2)\ Hz$ oznacza, że $\bar{f} = 329{,}6\ Hz, a\ u(f) = 4{,}2\ Hz$].
7. We wnioskach dokonać interpretacji uzyskanych wyników i porównaj z danymi tablicowymi. Obliczyć także błąd względny procentowy.