

## Ćwiczenie Nr 207

Temat: Wyznaczanie momentu bezwładności bryły przy użyciu wahadła torsyjnego

### I. Literatura:

1. Sz.Szczeniowski, „Fizyka doświadczalna”, cz. 1, §§ 55, 56.
2. D.Halliday, R.Resnick, „Fizyka”, rozdz. 15.

### II. Tematy teoretyczne:

1. ruch harmoniczny,
2. zasady dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej,
3. moment bezwładności.

### III. Cel ćwiczenia:

Poznanie wahadła torsyjnego, wyznaczenie momentów bezwładności badanej bryły względem wielu osi centralnych oraz określenie kierunków osi głównych tensora momentu bezwładności tej bryły.

### IV. Wprowadzenie:

Wahadło torsyjne, zwane również skrętnym, zbudowane jest ze sztywnej ramki, do której przymocowany jest drut stalowy rozpięty pionowo. Gdy ramkę obrócimy o niewielki kąt  $\alpha$ , drut ulega skręceniu i wywiera na ramkę moment siły proporcjonalny do  $\alpha$ , dążący do przywrócenia stanu równowagi. Ruch wahadła opisuje równanie różniczkowe:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + D\alpha = 0 \quad (1)$$

gdzie:  $I$  - jest momentem bezwładności ramki  
 $D$  - kątowym momentem kierującym

Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego jest równanie drgania harmonicznego, które wykonywać będzie ramka.

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t \quad (2)$$

gdzie:  $\alpha$  - jest kątem skręcenia drutu w chwili  $t$   
 $\alpha_0$  - kątem skręcenia drutu w momencie początkowym  
 $\omega$  - częstością kątową drgać wahadła

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (3)$$

Okres drgań wahadła  $T$  wynosi:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (4)$$

Gdy w ramce zamocujemy bryłę o znanym momencie bezwładności  $I_1$  to okres drgań wyniesie:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_1}{D}} \quad (5)$$

Jeśli w ramce umieścimy bryłę, której moment bezwładności  $I_s$  względem osi obrotu chcemy wyznaczyć, okres drgań będzie równy:

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_s}{D}} \quad (6)$$

Z równań (4), (5), (6) obliczymy  $I_s$

$$I_s = I_1 \frac{T_s^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (7)$$

Bryłą o znanym momencie bezwładności będzie walec, który umieścimy w ramce tak, by oś obrotu wahadła była zgodna z osią symetrii walca. Moment bezwładności walca określony jest wzorem:

$$I_1 = \frac{1}{2} mr^2 \quad (8)$$

gdzie:  $m$  - oznacza masę walca  
 $r$  - jego promień

Centralnym momentem bezwładności bryły nazywamy moment względem osi przechodzącej przez środek masy bryły sztywnej. Każda bryła ma taką centralną oś obrotu, względem której moment bezwładności ma największą wartość oraz oś do niej prostopadłą, względem której moment bezwładności jest najmniejszy. Osie te nazywają się głównymi osiami momentu bezwładności. Trzecią osią główną jest oś do nich prostopadła, moment bezwładności ma względem niej pośrednią wartość.

Jeżeli przyjmiemy układ współrzędnych o początku w środku masy bryły i osiach równoległych do głównych osi momentu bezwładności, to w układzie tym  $I_{xx}$  oznacza największy centralny moment bezwładności,  $I_{yy}$  - pośredni, a  $I_{zz}$  - najmniejszy moment. Gdy znamy kierunki osi głównych, oraz odpowiadające im wartości momentu bezwładności, to moment bezwładności tej bryły względem dowolnej osi centralnej, można obliczyć z wzoru:

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma \quad (9)$$

gdzie:

$I$  - oznacza moment względem dowolnej osi centralnej

$I_{xx}$  - oznacza maksymalny moment bezwładności

$I_{yy}$  - oznacza moment bezwładności względem osi  $\perp$  do osi największego i najmniejszego momentu bezwładności

$I_{zz}$  - oznacza najmniejszy moment bezwładności

$\alpha$  - kąt między daną osią obrotu, a osią  $OX$  bryły (na rysunku jest to oś  $c-c$ , a kąt  $\alpha=90^\circ$ )

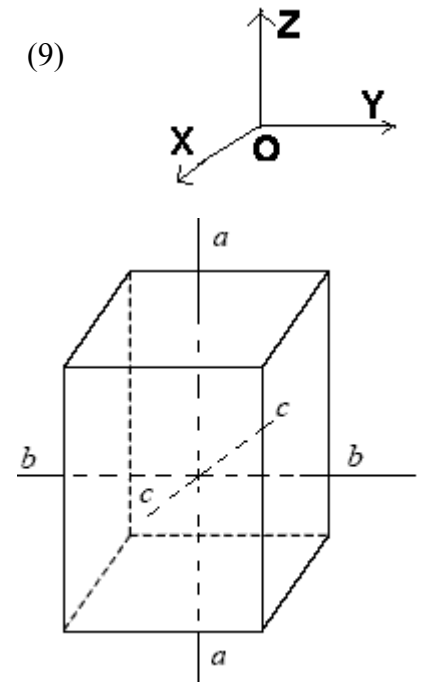
$\beta$  - kąt między daną osią obrotu, a osią  $OY$  bryły (na rysunku jest to oś  $b-b$ , a kąt  $\beta=90^\circ$ )

$\gamma$  - kąt między daną osią obrotu, a osią  $OZ$  bryły (na rysunku jest to oś  $a-a$ , a kąt  $\gamma=0^\circ$ )

Uwaga: na rysunku obok oś  $c-c$  jest osią  $OX$ , oś  $b-b$  jest osią  $OY$ , a oś  $a-a$  jest osią  $OZ$  i jeśli osią obrotu jest oś  $a-a$ , to kąty  $\alpha, \beta, \gamma$  wynoszą odpowiednio

$\alpha=90^\circ, \beta=90^\circ, \gamma=0^\circ$ .

Kąty  $\alpha, \beta, \gamma$  dla innych osi można wyznaczyć z rozmiarów brył i położenia osi obrotu, względem osi głównych momentu bezwładności- patrz Lit.1.



## V. Zestaw pomiarowy:

### 1. Opis budowy przyrządu

Przyrząd posiada ramkę do mocowania bryły zawieszoną na drucie stalowym. Ramka jest tak skonstruowana, aby można było w niej mocować bryły różniące się znacznie wymiarami zewnętrznymi. Mocowanie brył (12) realizuje się za pomocą ruchomej belki, przesuwanej się po prowadnicach między belkami stałymi. Po założeniu bryły należy dokręcić nakrętki na tulejkach zaciskowych, umieszczonych na belce ruchomej.

### 2. Działanie przyrządu

- a) Włączyć przyrząd i wcisnąć kolejno przyciski oznaczone napisami „CETb” i „CbPOC”.
- b) Wychylić ramkę przyrządu tak, by jej wysięgnik zbliżył się do rdzenia elektromagnesu i był przez niego przytrzymywany.
- c) Wcisnąć przycisk „ПЫСК” zwalniając tym samym ramkę. Drgająca ramka wykonując oscylacje, przecina wysięgnikiem wiązkę światła czujnika fotoelektrycznego. Czujnik rejestruje te drgania a na wskaźnikach cyfrowych wskazywane są liczba okresów oraz czas trwania drgań.
- d) Wcisnąć przycisk „СТОП”, gdy na wyświetlaczu zliczającym liczbę drgań wyświetli się cyfra 9- pomiar zakończy się po upływie pełnego okresu drgań ramki, czyli po wykonaniu 10 drgań.
- e) Zanotować wynik pomiaru i zwolnić przycisk „ПЫСК”
- f) Ponownie wychylić ramkę tak, by była przytrzymywana przez elektromagnes.
- g) Nacisnąć przycisk „CbPOC”, aby wyzerować poprzedni wynik. Przyrząd jest gotowy do następnego pomiaru, który można przeprowadzić wykonując czynności wymienione w punktach c, d, e.

## VI. Wykonanie ćwiczenia:

1. Sprawdzić poziome ustawienie przyrządu.
2. Zmierzyć czas  $t$  trwania  $n = 10$  okresów drgań nieobciążonego wahadła i określić jego okres  $T_0 = t/n$ .
3. Zważyć walec oraz zmierzyć suwmiarką (wypożyczyć ją w pok. 619) jego średnicę.
4. Umocować w ramce walec i jak w punkcie 2 wyznaczyć okres drgań wahadła  $T_1 = t/n$ .
5. Zmierzyć wymiary bryły wskazanej przez osobę prowadzącą ćwiczenia. Wgłębienia, wykonane w bryłach, umożliwiają mocowanie ich w ramce. Bryła może być obracana wokół 11 osi:  
3 osi przechodzących przez środki przeciwległych ścian,  
6 osi przechodzących przez środki przeciwległych krawędzi,  
4 osi przechodzących przez naprzemianległe wierzchołki.
6. Wyznaczyć okresy drgań wahadła obciążonego badaną bryłą, względem 3 osi centralnych i 2 innych osi wskazanych przez prowadzącego,  $T_s = t/n$ .
7. Powtórzyć pomiar czasu trwania 10 okresów kilka razy i ocenić niepewność pomiaru czasu  $\Delta t$ .

## VII. Obliczenia:

1. Obliczyć moment bezwładności walca względem jego osi symetrii (wg wzoru (8)).
2. Obliczyć centralne momenty bezwładności badanej bryły względem zmierzonych osi obrotu (wg wzoru (7)).

3. Korzystając ze wzoru (9) obliczyć teoretyczny moment bezwładności względem jednej z wybranych osi (np. przechodzącej przez środki przeciwległych boków) i porównać wynik z wartością wyznaczoną ze wzoru (7).
4. Obliczyć niepewność wyznaczenia momentu bezwładności.

### VIII. Tabelka:

Stan wahadła	n	t [s]	T [s]	I [kg m <sup>2</sup> ]	Δ I [kg m <sup>2</sup> ]
nieobciążone					
walec					
bryła oś    do a-a (OZ)					
bryła oś    do b-b (OY)					
bryła oś    do c-c (OX)					
osie ⊥ do a-a (OZ)					-
					-
osie ⊥ do b-b (OY)					-
					-
osie ⊥ do c-c (OZ)					-
					-
osie łączące naprzemianległe wierzchołki					-
					-
					-
					-

masa walca

$m =$

$\Delta m =$

średnica walca

$d =$

$\Delta d =$

wymiary bryły

$a =$

$\Delta a =$

$b =$

$\Delta b =$

$c =$

$\Delta c =$

niepewność pomiaru czasu

$\Delta t =$